PROBLEMA 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3; 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura.
Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

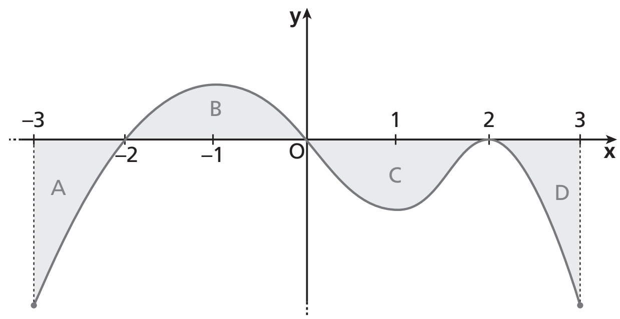

Figura 2

a. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

b. Individua i valori di $x \in [-3; 3]$ per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

c. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + g(x)}{2x}$.

d. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

PROBLEMA 2

a. Osserviamo il grafico della funzione $f(x)$. I punti di intersezione del grafico Γ con l'asse x sono tre, di ascisse $-2, 0, 2$. I tre punti corrispondono alle radici dell'equazione $f(x) = 0$:

- $x = -2$ e $x = 0$ sono soluzioni di molteplicità 1;
- $x = 2$ è di molteplicità pari (almeno 2).

Osserviamo quindi che se $f(x)$ fosse polinomiale, la sua equazione potrebbe essere del tipo:

$$f(x) = p(x)x(x+2)(x-2)^2, \quad \text{dove } p(x) \text{ è un polinomio non nullo.}$$

Il grado di un polinomio espresso come prodotto di polinomi è la somma dei gradi dei suoi fattori: dunque, concludiamo che il grado di $f(x)$ deve essere almeno 4.

Saremmo potuti giungere alla stessa conclusione considerando le condizioni imposte dal problema sui punti stazionari o sulla concavità del grafico della funzione.

Se procedessimo con la ricerca di un polinomio che soddisfi tutte le caratteristiche della funzione descritte dal problema e sia di grado 4, scopriremmo che tale polinomio non esiste. Tuttavia il problema non chiede di determinare il polinomio e nemmeno quale sia il suo grado minimo effettivo.

b. I punti stazionari della funzione $g(x)$ corrispondono ai punti in cui si annulla la sua derivata:

$$g'(x) = f(x) = 0, \text{ cioè } x = -2,\ x = 0,\ x = 2.$$

Per individuare i punti di massimo relativo studiamo il segno di $g'(x)$ deducendolo dal segno di $f(x)$.

- $g'(x) > 0$ dove $f(x) > 0$ $\rightarrow$ per $-2 < x < 0$ g è crescente;
- $g'(x) < 0$ dove $f(x) < 0$ $\rightarrow$ per $-3 < x < -2$, $0 < x < 2$, $2 < x < 3$ g è decrescente.

Quindi $g(x)$ ha un massimo relativo per $x = 0$, un minimo relativo per $x = -2$ e un punto di flesso orizzontale per $x = 2$.

La funzione $g(x)$ volge la concavità verso l'alto negli intervalli in cui la sua derivata seconda è positiva. Dato che $g''(x) = f'(x)$ e $f'(x) > 0$ negli intervalli in cui $f(x)$ è crescente, basta osservare la figura per capire che ciò accade in $]-3; -1[$ e in $]1; 2[$.

c. Sapendo che $g(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e che $g(3) = -5$, possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale a $f(x)$ sull'intervallo $[0; 3]$:

$$\int_0^3 f(x)dx = g(3) - g(0), \text{ da cui } g(0) = -5 - \int_0^3 f(x)dx.$$

Ricordiamo che l'integrale definito di una funzione negativa è pari all'area, cambiata di segno, compresa tra il grafico della funzione e l'asse x. Di conseguenza:

$$\int_0^3 f(x)dx = -\text{Area}(C) - \text{Area}(D) = -4, \text{ da cui } g(0) = -5 - (-4) = -1.$$

Ora consideriamo il limite $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 + g(x)}{2x}$.

Sostituendo il valore $x = 0$, il numeratore diventa $1 + g(0) = 1 + (-1) = 0$ e il denominatore $2 \cdot 0 = 0$.

Il limite L è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Possiamo calcolarlo con il teorema di De L'Hospital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2}.$$

Osserviamo che il limite L esiste perché $f(x)$ è continua in $x = 0$, con $f(0) = 0$. Concludiamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x} = \frac{f(0)}{2} = 0.$$

d. Per calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{1} h(x)dx = 3 \cdot \int_{-2}^{1} f(2x+1)dx,$$

effettuiamo il seguente cambiamento di variabile: $2x + 1 = t \quad \to \quad dx = \frac{1}{2}dt$.

Gli estremi $x = -2$ e $x = 1$ vengono trasformati rispettivamente in $t = -3$ e $t = 3$. L'integrale diventa:

$$\int_{-2}^{1} h(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-3}^{3} f(t)dt = \frac{3}{2}\left(\int_{-3}^{-2} f(t)dt + \int_{-2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{3} f(t)dt\right) =$$

$$\frac{3}{2}(-\text{Area}(A) + \text{Area}(B) - \text{Area}(C) - \text{Area}(D)) = \frac{3}{2}(-2+3-3-1) = \frac{3}{2}(-3) = -\frac{9}{2}.$$