Liceo scientifico e opzione scienze applicate

1 Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\cos(x) - 1)}{\ln(\cos^2(x))}.$$

1 Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ poiché sia il numeratore $f(x) = \sin(\cos x - 1)$ sia il denominatore $g(x) = \ln(\cos^2 x)$ tendono a 0 quando x tende a 0. Possiamo applicare il teorema di De L'Hospital in quanto:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in un opportuno intorno I di $x = 0$, con $f(0) = g(0) = 0$;
- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $I - \{0\}$, con $f'(x) = -\sin x \cdot \cos(\cos x - 1)$ e

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2\cos x(-\sin x) = -\frac{2\sin x}{\cos x} \neq 0 \text{ in } I - \{0\}.$$

Applichiamo dunque il teorema:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x - 1)}{\ln(\cos^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \left[-\sin x \cdot \cos(\cos x - 1) \cdot \left(-\frac{\cos x}{2\sin x}\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to 0} \left[\cos(\cos x - 1) \cdot \frac{\cos x}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$