5 Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo del grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{2^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

5 La funzione $f(x)=\dfrac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ ha dominio $\mathbb{R}-\{0\}$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}=+\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-\infty.$$

Pertanto la funzione può ammettere asintoto obliquo.

Calcoliamo, se esistono finiti, i limiti $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ e $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2},$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}x\left(\frac{2}{2^{\frac{1}{x}}+1}-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}x\left(\frac{2-2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}\right)=$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}+1}\cdot\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}.$$

Poniamo $t=\dfrac{1}{x}$, allora $t\to 0$ per $x\to\pm\infty$ e il limite diventa:

$$q=-\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t}=-\frac{1}{4}\ln 2,$$

utilizzando il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Esiste pertanto l'asintoto obliquo di equazione:

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln 2.$$